第 28 卷　第 6 期　　西 南 师 范 大 学 学 报 (自然科学版)　　2003 年 12 月
Vol. 28　No. 6　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science)　　Dec. 2003

文章编号：1000 - 5471(2003)06 - 0863 - 06

一类具有阶段结构的传染病模型①

金　瑜[1]，　张　勇[2]，　王稳地[1]

1. 西南师范大学 数学与财经学院，重庆 400715；2. 成都东方双语学校，成都 610100

摘要：研究了一类具有阶段结构的 SIS 成年传染病模型的渐近性态，讨论了无病平衡点与地方病平衡点的存在性和局部渐近稳定性及无病平衡点的全局渐近稳定性，找到了种群一致持续生存的条件.

关　键　词：传染病；种群；阶段结构；稳定性；一致持续生存

中图分类号：O175.13；Q141　　文献标识码：A

文献[1]提出了 3 类具有阶段结构的传染病的数学模型：① 成年病时滞阶段结构 SIS 模型；② 幼年病时滞阶段结构 SIS 模型；③ 成年病非时滞阶段结构 SIS 模型. 前两类模型的研究已经很好地解决了"在考虑时滞阶段结构的种群中，成年病和幼年病在什么情况下可以消除，在什么情况下会长期存在成为地方病"这一问题[2]. 事实上，成年病在非时滞阶段结构的种群中的流行情况也是传染病学研究的一个重要的课题. 清楚地了解这类成年病的流行情况对于消除或控制成年病也是具有非常重要的作用的，因此本文对第 3 类模型进行讨论.

本文以文献[1] 中的模型(17) 为基础，采用新的种群出生函数$\frac{A}{N(t)} + B$，$A > 0$，$B > 0$，$N(t)$ 为种群数量. 为简化起见，不采用 Logistic 型死亡率[1]，而取幼年种群和成年种群的死亡率分别为不同常数. 考虑到患病种群如果生育后代，可能会通过遗传或接触传染把疾病传染给它们的后代，故假设患病种群不生育后代. 从而得到以下模型：

$$
\begin{aligned}
x'_i(t) &= \left(\frac{A}{x_m(t)} + B\right)x_m(t) - rx_i(t) - \omega x_i(t) \\
x'_m(t) &= \omega x_i(t) - \zeta x_m(t) - ax_m(t)y_m(t) + cy_m(t) \\
y'_m(t) &= ax_m(t)y_m(t) - by_m(t) - \zeta y_m(t) - cy_m(t)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

这里，$x_i(t)$，$x_m(t)$，$y_m(t)$ 分别表示幼年种群、成年健康种群、成年患病种群在时刻 t 的数量，a 为传染率，c 为治愈率，b 为因病死亡率，ζ 为成年种群的自然死亡率，ω，r 分别为幼年种群的成熟率、死亡率，所有这些参数均为非负常数.

1　平衡点的存在性

通过无量纲化减少参数，作变换 $\bar{t} = (r + \omega)t$，$\bar{x}_i(t) = \frac{\omega + r}{A}x_i(t)$，$\bar{x}_m(t) = \frac{B}{A}x_m(t)$，$\bar{y}_m(t) = \frac{cB}{A(\omega + r)}y_m(t)$. 将$(\bar{t},\bar{x}_i(t),\bar{x}_m(t),\bar{y}_m(t))$ 仍记为$(t,x_i(t),x_m(t),y_m(t))$，则原方程组改写为：

---

① 收稿日期：2003 - 04 - 07

基金项目：国家自然科学基金资助项目(10271096).

作者简介：金　瑜(1980 -)，女，四川绵阳人，硕士研究生，主要从事生物数学的研究.

通讯作者：王稳地，教授.

$$\begin{aligned} x'_i(t) &= 1 + x_m(t) - x_i(t) \\ x'_m(t) &= c_1 x_i(t) - c_2 x_m(t) - c_3 x_m(t) y_m(t) + y_m(t) \\ y'_m(t) &= c_4 x_m(t) y_m(t) - c_5 y_m(t) \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $c_1 = \dfrac{B\omega}{(\omega + r)^2}$，$c_2 = \dfrac{\zeta}{r + \omega}$，$c_3 = \dfrac{aA}{cB}$，$c_4 = \dfrac{aA}{B(r + \omega)}$，$c_5 = \dfrac{b + \zeta + c}{r + \omega}$.

通过简单计算可得以下结论：

1) 当 $c_2 > c_1$，即$\dfrac{c_2}{c_1} > 1$ 时，系统(2) 存在唯一的无病平衡点

$$E^0 = (x_i^0, x_m^0, 0) = \left(\frac{c_2}{c_2 - c_1}, \frac{c_1}{c_2 - c_1}, 0\right)$$

2) 当$(c_1c_4 + c_1c_5 - c_2c_5)(c_3c_5 - c_4) > 0$时，系统(2) 的地方病平衡点存在. 又 $c_3c_5 - c_4 = \dfrac{aA(b + \zeta)}{cB(\omega + r)} > 0$，故当 $c_1c_4 + c_1c_5 - c_2c_5 > 0$，即$\dfrac{c_2}{c_1} < 1 + \dfrac{c_4}{c_5}$ 时，地方病平衡点存在，记此平衡点为

$$E^* = (x_i^*, x_m^*, y_m^*) = \left(1 + \frac{c_5}{c_4}, \frac{c_5}{c_4}, \frac{c_1c_4 + c_1c_5 - c_2c_5}{c_3c_5 - c_4}\right)$$

2 平衡点的局部稳定性

为求系统(2) 的平衡点的局部稳定性，考虑其雅可比矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ c_1 & -c_2 - c_3 y_m & -c_3 x_m + 1 \\ 0 & c_4 y_m & c_4 x_m - c_5 \end{pmatrix}$$

定理2.1 如果$\dfrac{c_2}{c_1} > 1 + \dfrac{c_4}{c_5}$，则无病平衡点 E^0 局部渐近稳定.

证 显然，当$\dfrac{c_2}{c_1} > 1 + \dfrac{c_4}{c_5}$时无病平衡点 $E^0 = (x_i^0, x_m^0, 0)$ 存在. 设 A_1 为系统(2) 在 E^0 处的雅可比矩阵. 易知，A_1的特征方程为：

$$p(\lambda) = \lambda^3 + P_1\lambda^2 + P_2\lambda + P_3 = 0$$

其中 $P_1 = c_2 - b_2 + 1$，$P_2 = c_2 - c_1 - b_2(1 + c_2)$，$P_3 = -b_2(c_2 - c_1)$，$b_2 = \dfrac{c_4c_1}{c_2 - c_1} - c_5$.

由 Hurwitz 定理，A_1的特征根具有负实部的条件为：

$$P_1 > 0 \qquad P_3 > 0 \qquad P_1P_2 > P_3$$

由$\dfrac{c_2}{c_1} > 1 + \dfrac{c_4}{c_5}$，$b_2 < 0$，所以 $P_1 > 0$，$P_3 > 0$，而 $P_1P_2 > P_3$ 当且仅当 $c_2 - c_1 > b_2(1 + c_2 - b_2)$ 时成立，此式显然成立. 故 $p(\lambda) = 0$ 有三个负实部的特征根，从而 E^0 局部渐近稳定.

将定理 2.1 中的条件用系统(1) 中的参数表示即为：

$$\zeta + \frac{\zeta r}{\omega} > B + \frac{aA}{b + \zeta + c}$$

从而若种群的各项参数满足此式，则在一定初始状态下，疾病是可以在种群中灭绝的. 从这个式子也可以看出，种群的出生率越小，死亡率(包括自然死亡率和因病死亡率) 越大，疾病就越容易灭绝.

以下讨论地方病平衡点的稳定性. 为叙述方便起见，先引入以下记号：

$$k_1 = c_1c_4 + c_1c_5 - c_2c_5 \qquad k_2 = c_3c_5 - c_4$$
$$k_3 = (1 + c_2)(c_1 - c_2) - c_2k_1 \qquad k_4 = -1 - k_1 + c_1 - 2c_2$$

同样由 Hurwitz 定理，不难得到如下定理：

定理 2.2 如果系统(2) 满足条件$\dfrac{c_2}{c_1} < 1 + \dfrac{c_4}{c_5}$，$k_3k_2^2 + c_3k_1k_2k_4 - c_3^2k_1^2 < 0$，则地方病平衡点 E^* 局部

渐近稳定.

事实上，当$\frac{c_2}{c_1} > 1$时，$k_3k_2^2 + c_3k_1k_2k_4 - c_3^2k_1^2 < 0$必成立，故知，当$1 < \frac{c_2}{c_1} < 1 + \frac{c_4}{c_5}$时，必有地方病平衡点存在且局部渐近稳定. 用系统(1)中的参数表示，此条件为：$1 < \frac{\zeta}{B} + \frac{\zeta r}{B\omega} < 1 + \frac{aA}{B(b + \zeta + c)}$. 故若种群的各项参数满足此式，则在一定初始状态下，疾病最终会成为地方病，长期流行下去.

3　种群的一致持续生存

设$(x_i(t), x_m(t), y_m(t))$是系统(2)当$t = 0$时过初值$(x_i(0), x_m(0), y_m(0))$的解，这里$x_i(0) > 0$，$x_m(0) > 0$，$y_m(0) > 0$. 首先证明它是正解，即对任意$t > 0$，均有$x_i(t) > 0$，$x_m(t) > 0$，$y_m(t) > 0$. 从(2)的第3个方程解得：

$$y_m(t) = y_m(0)e^{\int_0^t(c_4x_m(s) - c_5)\mathrm{d}s}$$

故当$y_m(0) > 0$时，$y_m(t) > 0$. 再证$x_i(t)$，$x_m(t)$均大于0. 反之，假设$x_i(t)$，$x_m(t)$不全为正. 若$x_i(t)$首先小于或等于0，则存在$t_1 > 0$使得$x_i(t_1) = 0$，$x_m(t_1) > 0$，且当$0 \leqslant t < t_1$时，$x_i(t) > 0$，$x_m(t) > 0$. 由系统第一个方程，$x'_i(t_1) = 1 + x_m(t_1) > 0$. 这与$t = t_1$，$x'_i(t) \leqslant 0$矛盾. 若$x_m(t)$首先小于或等于0，则存在$t_2 > 0$使得$x_i(t_2) > 0$，$x_m(t_2) = 0$，且当$0 \leqslant t < t_2$时，$x_i(t) > 0$，$x_m(t) > 0$. 由系统的第二个方程，$x'_m(t_2) = c_1x_i(t_2) + y_m(t_2) > 0$，这与$t = t_2$，$x'_m(t) \leqslant 0$矛盾. 再假设$x_i(t)$，$x_m(t)$同时为0，即存在$t_3$，使得$x_i(t_3) = 0$，$x_m(t_3) = 0$，且当$0 \leqslant t < t_3$时，$x_i(t) > 0$，$x_m(t) > 0$. 则

$$x_m(t) = e^{\int_0^t(-c_2 - c_3y_m)\mathrm{d}s}\left(\int_0^t(c_1x_i + y_m)e^{\int_0^s(c_2 + c_3y_m)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s + x_m(0)\right)$$

由$x_m(t_3) = 0$，$0 < \int_0^{t_3}(c_1x_i + y_m)e^{\int_0^s(c_2 + c_3y_m)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s + x_m(0) = 0$，矛盾. 从而，若初值$x_i(0) > 0$，$x_m(0) > 0$，$y_m(0) > 0$，则过此初值的解$(x_i(t), x_m(t), y_m(t))$均大于0.

定理 3.1　若$\frac{c_2}{c_1} > 1$，则存在一个正数$M > 0$，当t充分大时，系统的任意正解都有

$$(x_i(t), x_m(t), y_m(t)) < (M, M, M)$$

证　令$V(t) = m_1x_i(t) + x_m(t) + \frac{c_3}{c_4}y_m(t)$，其中$c_1 < m_1 < c_2$. 则$V(t)$沿(2)的导数为：

$$\begin{aligned} V'(t) &= m_1(1 + x_m - x_i) + c_1x_i - c_2x_m - c_3x_my_m + y_m + \frac{c_3}{c_4}y_m(c_4x_m - c_5) \\ &= m_1 + (c_1 - m_1)x_i + (m_1 - c_2)x_m + \frac{c_4 - c_3c_5}{c_4}y_m \end{aligned}$$

取$m_3 = \min\left\{m_1 - c_1, c_2 - m_1, \frac{-c_4 + c_3c_5}{c_4}\right\}$，则

$$V'(t) \leqslant m_1 - m_3V(t)$$

故$t > T$时

$$V(t) \leqslant V(T)e^{-m_3(t-T)} + \frac{m_1}{m_3}$$

所以，存在一个充分大的正数M，使得当t充分大时有$V(t) < M$.

下面这个定理是这部分的主要结果.

定理 3.2　当$1 < \frac{c_2}{c_1} < 1 + \frac{c_4}{c_5}$时，系统(2)是一致持续生存的.

证　令

$$X = \{(x_i, x_m, y_m) \mid x_i \geqslant 0, x_m \geqslant 0, y_m \geqslant 0\}$$
$$X_0 = \{(x_i, x_m, y_m) \in X \mid x_i > 0, x_m > 0, y_m > 0\}$$

$$\partial X_0 = X \setminus X_0$$

只要证明 ∂X_0 一致排斥系统(2) 的正解即可.

前面已验证 X_0 是正不变的，易知，X 也是正不变的，∂X_0 是 X 中的相对闭集. 令

$$M_\partial = \left\{ (x_i(0), x_m(0), y_m(0)) \left| \begin{array}{l} (x_i(t), x_m(t), y_m(t)) \text{ 满足}(2)\text{，且} \\ (x_i(t), x_m(t), y_m(t)) \in \partial X_0, \ \forall t \geqslant 0 \end{array} \right. \right\}$$

现证明

$$M_\partial = \{(x_i, x_m, 0) \mid x_i \geqslant 0, x_m \geqslant 0\}$$

设 $(x_i(0), x_m(0), y_m(0)) \in M_\partial$，只要证明 $y_m(t) = 0$，$\forall t \geqslant 0$. 若不然，则存在 $t_0 > 0$，有 $y_m(t_0) > 0$. 取 $\eta > 0$ 充分小，使得当 $t_0 < t < t_0 + \eta$ 时，$y_m(t) > 0$，矛盾于 M_∂ 的定义.

M_∂ 中只有一个平衡点 $E^0 = \left(\frac{c_2}{c_2 - c_1}, \frac{c_1}{c_2 - c_1}, 0\right)$. 现证明 $W^s(E^0) \cap X_0 = \varnothing$. 反之，存在系统(2) 的一个正解 $(\bar{x}_i(t), \bar{x}_m(t), \bar{y}_m(t))$，使得 $t \to \infty$ 时，$(\bar{x}_i(t), \bar{x}_m(t), \bar{y}_m(t)) \to \left(\frac{c_2}{c_2 - c_1}, \frac{c_1}{c_2 - c_1}, 0\right)$. 取 $\zeta > 0$ 足够小，使 $\zeta < \frac{c_1}{c_2 - c_1} - \frac{c_5}{c_4}$. 让 $t_0 > 0$ 足够大，使 $t \geqslant t_0$ 时，$\frac{c_2}{c_2 - c_1} - \zeta < \bar{x}_i(t) < \frac{c_2}{c_2 - c_1} + \zeta$，$\frac{c_1}{c_2 - c_1} - \zeta < \bar{x}_m(t) < \frac{c_1}{c_2 - c_1} + \zeta$，$\bar{y}_m(t) < \zeta$，则可得：

$$\bar{y}'_m(t) \geqslant \bar{y}_m(t)\left(c_4\left(\frac{c_1}{c_2 - c_1} - \zeta\right) - c_5\right) \tag{3}$$

考虑方程

$$y'_m(t) = y_m(t)\left(c_4\left(\frac{c_1}{c_2 - c_1} - \zeta\right) - c_5\right) \tag{4}$$

因有 $\zeta < \frac{c_1}{c_2 - c_1} - \frac{c_5}{c_4}$，所以方程(4) 的半流是单调的. 设 $y_m(t)$ 是方程(4) 的一个正解，且满足 $y_m(t_1) < \bar{y}_m(t_1)$. 从而当 $t \to \infty$ 时，$y_m(t) \to \infty$. 又由(3)，当 $t > t_1$ 时，恒有 $\bar{y}_m(t) \geqslant y_m(t)$ 成立. 故 $\bar{y}_m(t) \to \infty$. 这矛盾于(2) 的非负解的最终有界性(见定理 3.1). 所以 $W^s(E^0) \cap X_0 = \varnothing$. 再注意到，$M_\partial$ 中的任意轨线当 $t \to \infty$ 时，都趋于 E^0. 从而 E^0 是 X 的孤立的不变集，显然它是无环的. 由文献[5] 定理 4.6 有，∂X_0 是 X_0 的一致强排斥子，即 ∂X_0 一致排斥(2) 的正解，故系统(2) 是一致持续生存的，证毕.

将定理 3.1,3.2 的条件用系统(1) 中的参数表示，分别为：$\frac{\zeta}{B} + \frac{\zeta r}{B\omega} > 1$ 和 $1 < \frac{\zeta}{B} + \frac{\zeta r}{B\omega} < 1 + \frac{aA}{B(b + \zeta + c)}$. 所以，当成年种群死亡率与出生率之比 $\frac{\zeta}{B}$ 乘以 1 加上幼年种群死亡率与成熟率之比 $\frac{r}{\omega}$ 的和 $\frac{\zeta}{B}\left(1 + \frac{r}{\omega}\right)$ 大于 1 时，种群的规模最终是有限的；若此乘积同时还被 $1 + \frac{aA}{B(b + \zeta + c)}$ 控制，则种群(包括幼年种群和成年健康种群和成年患病种群) 最终一致持续生存.

4 无病平衡点的全局渐近稳定性

引理 4.1 若 $x_i(0) \geqslant 0$，$x_m(0) \geqslant 0$，$y_m(0) = 0$，则当 $\frac{c_2}{c_1} > 1$ 时，系统(2) 过初值 $(x_i(0), x_m(0), y_m(0))$ 的解 $(x_i(t), x_m(t), y_m(t)) \to E^0$，$t \to \infty$.

证 由系统(2) 第 3 个方程知，若 $y_m(0) = 0$ 则 $y_m(t) \equiv 0$. 从而系统转化为 $x_i - x_m$ 平面上的系统：

$$\begin{aligned} x'_i(t) &= 1 + x_m(t) - x_i(t) \\ x'_m(t) &= c_1 x_i(t) - c_2 x_m(t) \end{aligned} \tag{5}$$

令(5) 右边的向量场为 $f = (f_1, f_2)$. 取 Dulac 函数 $D = \frac{1}{x_i x_m}$，则

$$\frac{\partial(Df_1)}{\partial x_i}+\frac{\partial(Df_2)}{\partial x_m}=\frac{\partial\left(\frac{1}{x_ix_m}+\frac{1}{x_i}-\frac{1}{x_m}\right)}{\partial x_i}+\frac{\partial\left(\frac{c_1}{x_m}-\frac{c_2}{x_i}\right)}{\partial x_m}$$
$$=-\left(1+\frac{1}{x_m}\right)\frac{1}{x_i^2}-c_1\frac{1}{x_m^2}<0$$

从而由 Dulac 判别法知，系统(5) 不存在极限环．又系统(5) 只有一个平衡点$\left(\frac{c_2}{c_2-c_1},\frac{c_1}{c_2-c_1}\right)$，且由定理 2.1 知它是局部渐近稳定的，故(5) 不存在奇异闭轨线．再由定理 3.1 知，系统(5) 的解最终有界，根据 Poincaré-Bendixson 定理，$\left(\frac{c_2}{c_2-c_1},\frac{c_1}{c_2-c_1}\right)$是全局渐近稳定的．所以，若 $x_i(0)\geqslant 0$，$x_m(0)\geqslant 0$，$y_m(0)=0$，则(2) 过初值$(x_i(0),x_m(0),y_m(0))$的解$(x_i(t),x_m(t),y_m(t))\to E^0=\left(\frac{c_2}{c_2-c_1},!\frac{c_1}{c_2-c_1},0\right)$.

由引理 4.1 知，当$\frac{c_2}{c_1}>1$时，无病平衡点 E^0 吸引 x_i-x_m 平面上的所有轨线．

因为 $c_3=\frac{aA}{cB}$，$c=0$时，$c_3=\infty$．故为避免方程系数为 ∞，下面我们回到原系统(1) 来讨论无病平衡点全局渐近稳定性．

定理 4.1　若 $c=0$ 且$\frac{A\omega}{\zeta(\omega+r)-B\omega}<\frac{b+\zeta}{a}$，则(1) 的无病平衡点全局渐近稳定．

证　易求(1) 的无病平衡点为 $E_1^0=\left(\frac{A\zeta}{\zeta(\omega+r)-B\omega},\frac{A\omega}{\zeta(\omega+r)-B\omega},0\right)$．当 $c=0$ 时，(1) 化为：

$$\begin{aligned}x'_i(t)&=A+Bx_m(t)-rx_i(t)-\omega x_i(t)\\x'_m(t)&=\omega x_i(t)-\zeta x_m(t)-ax_m(t)y_m(t)\\y'_m(t)&=ax_m(t)y_m(t)-by_m(t)-\zeta y_m(t)\end{aligned}\tag{6}$$

由(6) 的第二个方程，显然有

$$x'_m(t)=\omega x_i(t)-\zeta x_m(t)-ax_m(t)y_m(t)\leqslant\omega x_i(t)-\zeta x_m(t)$$

考虑系统：

$$\begin{aligned}\bar{x}'_i(t)&=A+B\bar{x}_m(t)-r\bar{x}_i(t)-\omega\bar{x}_i(t)\\\bar{x}'_m(t)&=\omega\bar{x}_i(t)-\zeta\bar{x}_m(t)\\\bar{y}'_m(t)&=a\bar{x}_m(t)\bar{y}_m(t)-b\bar{y}_m(t)-\zeta\bar{y}_m(t)\end{aligned}\tag{7}$$

显然此系统的边界平衡点也为 E_1^0．因为(7) 的前两个方程与 $\bar{y}_m(t)$ 无关，故可以先考虑 $\bar{x}_i(t)$，$\bar{x}_m(t)$ 的最终变化趋势．事实上，由这两个方程构成的方程组就是(1) 在 x_i-x_m 平面上的系统(即系统(1) 当 $y_m\equiv 0$ 的情况)．由引理 4.1，当$\frac{c_2}{c_1}>1$时，$\left(\frac{A\zeta}{\zeta(\omega+r)-B\omega},\frac{A\omega}{\zeta(\omega+r)-B\omega}\right)$在$\bar{x}_i(t)-\bar{x}_m(t)$平面上是全局渐近稳定的．根据 $c_i,i=1,2,3,4,5$ 的意义，条件$\frac{A\omega}{\zeta(\omega+r)-B\omega}<\frac{b+\zeta}{a}$当且仅当$\frac{c_2}{c_1}>1+\frac{c_4}{c_5}$时成立．故在定理假设下，(7) 的任意解$(\bar{x}_i(t),\bar{x}_m(t),\bar{y}_m(t))$都满足$\bar{x}_i(t)\to\frac{A\zeta}{\zeta(\omega+r)-B\omega}$，$\bar{x}_m(t)\to\frac{A\omega}{\zeta(\omega+r)-B\omega}$，$t\to\infty$，且对(7) 的任一解$(\bar{x}_i(t),\bar{x}_m(t),\bar{y}_m(t))$，都存在 $T>0$，使得 $t>T$ 时有$\bar{x}_m(t)<\frac{b+\zeta}{a}$．由(7) 的第三个方程可以解出

$$\bar{y}_m(t)=\bar{y}_m(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}(a\bar{x}_m(s)-(b+\zeta))\mathrm{d}s},\ t_0>T$$

从而 $t>T$ 时，$\bar{y}_m(t)$ 递减，且 $\bar{y}_m(t)\to 0$，$t\to\infty$．

设$(x_i(t),x_m(t),y_m(t))$、$(\bar{x}_i(t),\bar{x}_m(t),\bar{y}_m(t))$分别是(6) 和(7) 过初值$(x_i(0),x_m(0),y_m(0))=(\bar{x}_i(0),\bar{x}_m(0),\bar{y}_m(0))$的解．因为(7) 右边的向量场是拟单调不减的，故由比较定理知，当 $t>0$ 时，

$$x_i(t)\leqslant\bar{x}_i(t)\qquad x_m(t)\leqslant\bar{x}_m(t)\qquad y_m(t)\leqslant\bar{y}_m(t)$$

所以 $0 \leqslant \varliminf_{t\to\infty} y_m(t) \leqslant \varlimsup_{t\to\infty} y_m(t) = 0$，即 $y_m(t) \to 0$，$t \to \infty$. 故系统(6) 的任一解都有 $y_m(t) \to 0$，$t \to \infty$. 从而系统(6) 有极限系统：

$$
\begin{aligned}
x'_i(t) &= A + Bx_m(t) - rx_i(t) - \omega x_i(t) \\
x'_m(t) &= \omega x_i(t) - \zeta x_m(t)
\end{aligned} \tag{8}
$$

由引理 4.1 已经知道(8) 唯一的平衡点是全局渐近稳定的. 从而(6) 的任一解($x_i(t)$，$x_m(t)$，$y_m(t)$) 都有

$$
x_i(t) \to \frac{A\zeta}{\zeta(\omega + r) - B\omega} \qquad x_m(t) \to \frac{A\omega}{\zeta(\omega + r) - B\omega}
$$

到此我们已经证明了系统(6) 的任一解($x_i(t)$，$x_m(t)$，$y_m(t)$) 均满足

$$
(x_i(t), x_m(t), y_m(t)) \to E_1^0 \qquad t \to \infty
$$

从而在定理条件下，系统(1) 的无病平衡点 E_1^0 是全局渐近稳定的，证毕.

由定理 4.1，当系统的正平衡点不存在时，若治愈率为 0，则无论初始状态怎样，疾病最终会在种群中灭绝. 事实上，根据 c_i，$i = 1,2,3,4,5$ 的意义，条件

$$
\frac{A\omega}{\zeta(\omega + r) - B\omega} < \frac{b + \zeta}{a}
$$

当且仅当 $\frac{c_2}{c_1} > 1 + \frac{c_4}{c_5}$ 时成立，从而当 $c = 0$ 且 $\frac{c_2}{c_1} > 1 + \frac{c_4}{c_5}$ 时，原系统的无病平衡点全局渐近稳定.

参考文献：

[1] 陈兰荪，王东达，杨启昌. 阶段结构种群动力学模型 [J]. 北华大学学报(自然科学版)，2000，1(3)：185－191.

[2] Xiao Yanni，Chen Lansun. Modeling and Analysis of a Predator-Prey Model with Disease in the Prey [J]. *Math Biosci*，2001，171：59－82.

[3] 马知恩. 种群生态学的数学模型与研究 [M]. 合肥：安徽教育出版社，1994.

[4] Cooke K，van den Driessche P，Zou X. Interaction of Maturation Delay and Nonlinear Birth in Population and Epidemic Models [J]. *J Math Biol*，1999，39：332－352.

[5] Thieme Horst R. Persistence Under Relaxed Point-Dissipativity (with Application to an Endemic Model) [J]. *SIAM J Math Anal*，1993，24：407－435.

[6] 于宇梅，张 勇，王稳地. 一类强身型食饵－捕食者模型的渐近性态 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2001，26(4)：363－367.

An Epidemic Model with Stage Structure

JIN Yu[1]， ZHANG Yong[2]， WANG Wen-di[1]

1. *School of Mathematics and Finance*，*Southwest China Normal University*，*Chongqing* 400715，*China*；
2. *Chengdu Oriental Bilingual School*，*Chengdu Sichuan* 610100，*China*

Abstract：The asymptotic behavior of a structured SIS epidemic model is studied. Sufficient conditions for the existence and locally asymptotic stablity of the disease free equilibrium and endemic equilibrium are obtained. A condition for the disease free equilibrium to be globally asymptotic stable is obtained. Moreover，a condition for the population to be uniformly persistent is established.

Key words：epidemics；population；stage structure；stability；uniform persistence

责任编辑 覃吉康